

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

(a) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [1'25 puntos] Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Solución

(a)

$$f(x) = e^x(\sin x + \cos x).$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = e^x(2\cos(x)) = 2e^x(\cos(x))$$

De $f'(x) = 0$, obtenemos $\cos(x) = 0$, porque la exponencial no se anula nunca.

Las soluciones de $\cos(x) = 0$ en $[0, 2\pi]$ son $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$.

Como $f'(\pi/4) = 2e^{\pi/4}\cos(\pi/4) \approx 3'1 > 0$, $f(x)$ estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$

Como $f'(\pi) = 2e^{\pi}\cos(\pi) \approx -46'28 < 0$, $f(x)$ estrictamente decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$

Como $f'(2\pi - \pi/6) = f'(11\pi/6) = 2e^{11\pi/6}\cos(11\pi/6) \approx 549'43 > 0$, $f(x)$ estrictamente creciente en $(3\pi/2, 2\pi)$

Por definición $x = \pi/2$ es un máximo relativo y $x = 3\pi/2$ es un mínimo relativo

(b)

Para ver los puntos de inflexión calculamos las soluciones de $f''(x) = 0$, y vemos que $f''(x)$ cambia de signo a izquierda y derecha de ellos.

$$f(x) = e^x(\sin x + \cos x).$$

$$f'(x) = 2e^x(\cos(x))$$

$$f''(x) = 2e^x(\cos(x)) + 2e^x(-\sin(x)) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $\cos(x) - \sin(x) = 0$, es decir $\sin(x) = \cos(x)$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ esto es cierto en $x = \pi/4$ y $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$, que serán los posibles puntos de inflexión.

Como $f''(\pi/6) > 0$ y $f''(\pi/2) < 0$, $x = \pi/4$ es punto de inflexión.

Como $f''(\pi/2) < 0$ y $f''(\pi + \pi/3) > 0$, $x = \pi + \pi/4$ es punto de inflexión.

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = a \text{ (con } a > 0)$$

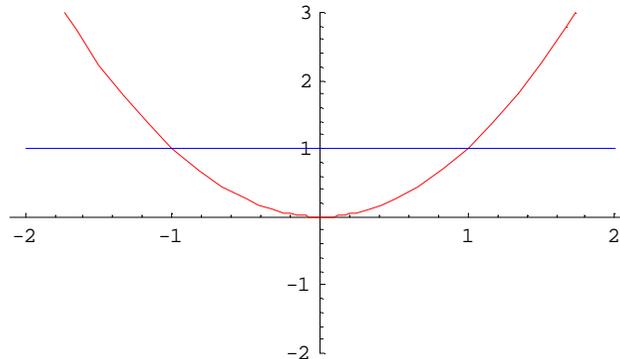
Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es $4/3$. Calcula el valor de la constante a .

Solución

Como $a > 0$, la gráfica de $g(x) = a$ es una recta paralela al eje OX y por encima de él.

La gráfica de $f(x)$ es una parábola con vértice en $(0,0)$ y ramas hacia arriba.

Un esbozo es



Como el área encerrada por el recinto es $4/3$, y sabemos que la recta $y = a$ es mayor que cero, tenemos que

$$\text{Área} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \frac{4}{3}, \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ las soluciones de } f(x) = g(x)$$

De $f(x) = g(x)$ tenemos $x^2 = a$, de donde $x = +\sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$

$$\frac{4}{3} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Al ser el recinto} \\ \text{simétrico} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = 2 \left[a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right]$$

Resolviendo la ecuación $2 \left[a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right] = \frac{4}{3}$, tenemos $2a\sqrt{a} = 2$, es decir $a^3 = 1$, de donde $a = 1$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el

cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = (A - kI) \cdot (A - kI) = O$$

$$(A - kI) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI) \cdot (A - kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando cada expresión a cero tenemos tendríamos nueve ecuaciones. Resolvemos la primera $k^2 - 1 = 0$. Sus soluciones son $k = 1$ y $k = -1$, y la única que verifica todas las expresiones es $k = 1$

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Se sabe que los planos de ecuaciones $x + 2y + bz = 1$, $2x + y + bz = 0$, $3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta r .

(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de b .

(b) [1'25 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas de r .

Solución

(a)
Si los planos se cortan en una recta nos piden que estudiemos el valor de b para que el sistema

$$\begin{array}{l} x + 2y + bz = 1, \\ 2x + y + bz = 0, \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{array}$$

tenga infinitas soluciones con $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, siendo A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada de dicho sistema.

$$\text{La matriz de los coeficientes del sistema es } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso es suficiente con que $\det(A) = 0$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{2^a+1^a(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -3 & -b \end{vmatrix} \stackrel{3^a+1^a(-3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -3 & -2-3b \end{vmatrix} = 1(6 + 9b - 3b) = 6 + 6b = 0, \text{ de donde } \mathbf{b = -1}.$$

(b)

Para la ecuación de la recta tomo las dos últimas ecuaciones

$$\begin{array}{l} 2x + y + bz = 0, \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{array}$$

con $b = -1$, es decir la recta es

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 0, \\3x + 3y - 2z &= 1\end{aligned}$$

Como me piden las ecuaciones paramétrica tomo $z = \lambda \in \mathfrak{R}$, con lo cual

$$2x + y = \lambda,$$

$3x + 3y = 1 + 2\lambda$. Sumándole la 1ª multiplicada por (-3) tenemos $-3x = 1 - \lambda$, de donde $x = (-1/3) + (1/3)\lambda$.

Sustituyendo este valor de x en la 1ª ecuación nos resulta $y = (2/3) + (1/3)\lambda$.

La recta en paramétricas es:

$$x = (-1/3) + (1/3)\lambda.$$

$$y = (2/3) + (1/3)\lambda.$$

$$z = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathfrak{R},$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f .

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f .

(c) [0'75 puntos] Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Como } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ +x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ tenemos } f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La gráfica de x^2 es la de una parábola con vértice en $(0,0)$ y las ramas hacia arriba. Sólo se dibuja en $[0,2]$.

La gráfica de $-x^2$ es la igual que la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX . Sólo se dibuja en $(-\infty, 0)$.

La gráfica de $6 - x$ es la de una recta, con dos puntos es suficiente para caberlo. Sólo se dibuja en $(0, \infty)$.

La función $x|x|$ es continua en \mathfrak{R} , en particular en $x < 2$

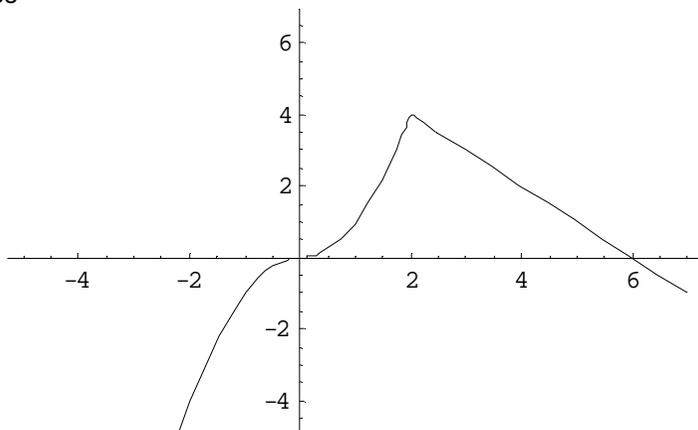
La función $6 - x$ es continua en \mathfrak{R} , en particular en $x > 2$.

Veamos la continuidad en $x = 2$, es decir que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b$$

Un esbozo de la gráfica es



(b)
De la gráfica se observa que la función no es derivable en $x = 2$, no obstante vamos a comprobarlo

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2; \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En principio f es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Estudiamos la derivada en $x = 0$ y $x = 2$.

$f(x)$ derivable en $x = 0$, se verifica que $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0$$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, **f es derivable en $x = 0$**

$f(x)$ derivable en $x = 2$, se verifica que $f'(2^+) = f'(2^-)$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-1) = -1$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-) = 0$, **f no es derivable en $x = 2$**

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(c)
Viendo la gráfica el área pedida es

$$\text{Área} = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = (8/3) + (36 - 18) - (12 - 2) = 32/3 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Calcula $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$$\int x^2 \ln(x) dx = \begin{cases} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases} = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9}$$

$$\text{Por tanto } \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = [(e^3/3) \ln(e) - (1/9)e^3] - [(1/3) \ln(1) - 1/9] = (2/9)e^3 + (1/9)$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B .

(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $AX + B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que existan las matrices inversas A^{-1} y B^{-1} los determinantes de las matrices tienen que ser distinto de cero.

$$\text{Como } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(4-4) = 0, B \text{ no tiene matriz inversa } B^{-1}.$$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a+1^a(-1) \\ 3^a+1^a(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, A \text{ tiene matriz inversa } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$AX + B = A + I$$

$AX = A + I - B$, como existe A^{-1} , multiplicamos ambos miembros por la izquierda por A^{-1} .

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(A + I - B)$$

$$IX = A^{-1}(A + I - B)$$

$$X = A^{-1}(A + I - B) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dados los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,3,1)$ y la recta "r" definida por las ecuaciones $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$,

halla las coordenadas de un punto de la recta "r" que equidiste de los puntos A y B.

Solución

$A(2,1,-1)$ y $B(-2,3,1)$

Ponemos la recta $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$ en paramétricas, tomamos un punto genérico suyo, el X, y le imponemos la

condición $d(\overline{AX}) = d(\overline{BX})$

Para la recta $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$ en paramétricas, tomamos $z = \lambda$ de R. Entrando en la ecuación segunda $3x - 2z =$

-5 , obtenemos $x = (-5/3) + (2/3)\lambda$. Sustituyendo en la primera $x - y - z = -1$, el valor de x y de z, obtenemos $y =$

$(-2/3) - (1/3)\lambda$

La recta en paramétricas es

$$x = (-5/3) + (2/3)\lambda$$

$$y = (-2/3) - (1/3)\lambda$$

$$z = \lambda \text{ de R.}$$

Un punto genérico suyo es $X((-5/3) + (2/3)\lambda, (-2/3) - (1/3)\lambda, \lambda)$

$$\overline{AX} = ((2/3)\lambda - 11/3, (-1/3)\lambda - 5/3, \lambda + 1)$$

$$\overline{BX} = ((2/3)\lambda + 1/3, (-1/3)\lambda - 11/3, \lambda - 1)$$

$$d(\overline{AX}) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\lambda - \frac{5}{3}\right)^2 + (\lambda + 1)^2}; d(\overline{BX}) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\lambda - \frac{11}{3}\right)^2 + (\lambda - 1)^2}$$

Igualando, elevando al cuadrado y desarrollando obtenemos

$(14/9)\lambda^2 - (16/9)\lambda + (155/9) = (14/9)\lambda^2 + (8/9)\lambda + (131/9)$, de donde $(24/9)\lambda = 24/9$, y por tanto $\lambda = 1$, y el punto equidistante de la recta es $X((-5/3) + (2/3)1, (-2/3) - (1/3)1, 1) = \mathbf{X(-1, -1, 1)}$